Math 220C - Lecture 26

June 4, 2021

Sheaves of modules

Let $\mathcal{R}$ be a sheaf of rings on X = Riemann surface.

- $\mathcal{R} = \mathcal{O}_X$ = sheaf of holomorphic functions
- $\mathcal{R} = \mathcal{C}^\infty$ = sheaf of smooth functions

Definition We say $\mathcal{F}$ is a sheaf of $\mathcal{R}$-modules if

- $\mathcal{F}(U)$ is an $\mathcal{R}(U)$-module $\forall\, U \subseteq X$ open
- $\forall\, U \supseteq V$ open, we have a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R}(U) \times \mathcal{F}(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}(U) \arrow[d] \\ \mathcal{R}(V) \times \mathcal{F}(V) \arrow[r] & \mathcal{F}(V) \end{tikzcd}$$

Remark We can speak about sheaves of $\mathcal{C}^{\infty}$-modules or sheaves of $\mathcal{O}_X$-modules.

Remark If $\mathcal{F}$ is a sheaf of $\mathcal{C}^{\infty}$-modules, it can be shown

$$H^p(X, \mathcal{F}) = 0 \quad \forall p \geq 1.$$

This fact uses the existence of partitions of unity & applies to a class of sheaves called *fine*.

We next consider sheaves of $\mathcal{O}_X$-modules, also called just $\mathcal{O}_X$-modules.

Example $\mathcal{O}_X(D)$ is $\mathcal{O}_X$-module for all divisors D.

Indeed, let $f \in \mathcal{O}_X(D)(U)$ and $g \in \mathcal{O}_X(U)$. We have

$$\operatorname{div} f + D|_U \geq 0.$$

We wish to show $gf \in \mathcal{O}_X(D)(U)$ that is

$$\operatorname{div}(gf) + D|_U \geq 0 \iff$$

$$\iff \underbrace{\operatorname{div} g}_{\geq 0} + \underbrace{(\operatorname{div} f + D|_U)}_{\geq 0} \geq 0$$ which is true since

g is holomorphic so $\operatorname{div} g \geq 0$.

Definition $\mathcal{F}$ is locally free of rank r provided

$\exists$ open cover $X = \bigcup U_\alpha$ such that

$$\mathcal{F}|_{U_\alpha} \cong \underbrace{\mathcal{O}_X|_{U_\alpha} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_X|_{U_\alpha}}_{r \text{ copies}} \quad \text{as } \mathcal{O}_X|_{U_\alpha}\text{-modules}$$

Remark $\mathcal{O}_X(D)$ is locally free of rank 1.

Indeed, let $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ be coordinate charts. Write

$$D = \operatorname{div} f_\alpha \quad \text{in } U_\alpha.$$

Then g is a section of $\mathcal{O}_X(D)|_{U_\alpha}$ over $U \subseteq U_\alpha$ if

$$\begin{aligned} \operatorname{div} g + D|_U \geq 0 &\iff \operatorname{div} g + \operatorname{div} f_\alpha \geq 0 \quad \text{in } U \\ &\iff \operatorname{div} g f_\alpha \geq 0 \quad \text{in } U \\ &\iff g f_\alpha \in \mathcal{O}_X(U). \end{aligned}$$

Thus $\mathcal{O}_X(D)|_{U_\alpha} \longrightarrow \mathcal{O}_X|_{U_\alpha}$ is an isomorphism.

$$g \longmapsto g f_\alpha$$

Remark If $\mathcal{F}$ is a sheaf of $\mathcal{O}_X$-modules, then $\mathcal{F}(X)$ is a module over $\mathcal{O}_X(X)$. In particular, $H^0(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ is a $\mathbb{C}$ - vector space

In fact $H^p(X, \mathcal{F})$ is a $\mathbb{C}$ - vector space.

Coherent sheaves

$\mathcal{F} \longrightarrow X$ is coherent provided every point $x \in X$ admits a neighborhood $U \subseteq X$ and an exact sequence

$$\mathcal{O}_X|_U^{\oplus s} \longrightarrow \mathcal{O}_X|_U^{\oplus r} \longrightarrow \mathcal{F}|_U \longrightarrow 0$$

for some integers $r, s \geq 0$.

In particular $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(D)$ is coherent since it is locally free. (take $r = 1$, $s = 0$)

Theorem X compact Riemann surface, $\mathcal{F} \to X$ coherent $\mathcal{O}_X$-
-module. Then

$$\dim_{\mathbb{C}} H^p(X, \mathcal{F}) < \infty \quad \text{for } p = 0 \ \& \ 1.$$

Furthermore $H^p(X, \mathcal{F}) = 0$ for $p \neq 0, 1$.

Example X compact Riemann surface. Define

$$g = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}_X) = \text{arithmetic genus} < \infty.$$

The theorem allows us to define

$$\chi(X, \mathcal{F}) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{F}) - \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{F}) < \infty.$$

Example [i] $\chi(X, \mathcal{O}_X) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{O}_X) - \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}_X)$

$$= 1 - g.$$

[ii] If $\mathcal{F}$ = skyscraper sheaf, $H^0(X, \mathcal{F}) = \mathbb{C}$, $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$

$\implies \chi(X, \mathcal{F}) = 1.$

Remark If $0 \to U \to V \to W \to 0$ is an exact sequence of vector spaces then

$$\dim V = \dim U + \dim W$$

More generally, if

$$0 \to V_0 \to V_1 \to \cdots \to V_n \to 0 \quad \text{exact}$$

then $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim V_k = 0.$

Remark If $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ exact

then
$$0 \to H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{G}) \to H^0(X, \mathcal{H}) \to H^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{G}) \to H^1(X, \mathcal{H}) \cdots$$

and the previous remark gives

$$\chi(X, \mathcal{G}) = \chi(X, \mathcal{F}) + \chi(X, \mathcal{H})$$

The Riemann - Roch Theorem

Question Given compact Riemann surface X

- $z_1 \dots z_n \in X$, $p_1 \dots p_m \in X$
- $\mu_1 \dots \mu_n \geq 0$, $\nu_1, \dots \nu_m \geq 0$ integers

Want f meromorphic in X

- f has zeroes at z_i of order $\geq \mu_i$
- f has poles at p_i of order $\leq \nu_i$

Other zeroes are allowed, but no other poles.

Let $D = - \sum_i \mu_i [z_i] + \sum_i \nu_i [p_i]$

We thus want to understand $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$.

Theorem (Riemann - Roch)

$$\boxed{\chi(X, \mathcal{O}_X(D)) = 1 - g + \deg D.}$$

Remark We obtain a lower bound

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \geq \chi(X, \mathcal{O}_X(D)) = 1 - g + \deg D.$$

Remark Serre duality can be used to conclude that we have an equality in certain cases e.g. $\deg D \geq 2g - 1$.

14.

Theorie der *Abel*'schen Functionen.

(Von Herrn *B. Riemann*.)

In der folgenden Abhandlung habe ich die *Abel*'schen Functionen nach einer Methode behandelt, deren Principien in meiner Inauguraldissertation *) aufgestellt und in einer etwas veränderten Form in den drei vorhergehenden Aufsätzen dargestellt worden sind. Zur Erleichterung der Uebersicht schicke ich eine kurze Inhaltsangabe vorauf.

Die erste Abtheilung enthält die Theorie eines Systems von gleichverzweigten algebraischen Functionen und ihren Integralen, soweit für dieselbe nicht die Betrachtung von ϑ-Reihen mafsgebend ist, und handelt im §. 1—5 von der Bestimmung dieser Functionen durch ihre Verzweigungsart und ihre Unstetigkeiten, im §. 6—10 von den rationalen Ausdrücken derselben in zwei durch eine algebraische Gleichung verknüpfte veränderliche Gröfsen, und im §. 11—13 von der Transformation dieser Ausdrücke durch rationale Substitutionen. Der bei dieser Untersuchung sich darbietende Begriff einer *Klasse* von algebraischen Gleichungen, welche sich durch rationale Substitutionen in einander transformiren lassen, dürfte auch für andere Untersuchungen wichtig und die Transformation einer solchen Gleichung in Gleichungen niedrigsten Grades ihrer Klasse (§. 13) auch bei anderen Gelegenheiten von Nutzen sein. Diese Abtheilung behandelt endlich im §. 14—16 zur Vorbereitung der folgenden die Anwendung des *Abel*'schen Additionstheorems für ein beliebiges System allenthalben endlicher Integrale von gleichverzweigten algebraischen Functionen zur Integration eines Systems von Differentialgleichungen.

In der zweiten Abtheilung werden für ein beliebiges System von immer endlichen Integralen gleichverzweigter, algebraischer, $\overline{2p+1}$fach zusammenhangender Functionen die *Jacobi*'schen Umkehrungsfunctionen von p veränderlichen Gröfsen durch $p$fach unendliche ϑ-Reihen ausgedrückt, d. h. durch Reihen von der Form

*) Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Gröfse. Göttingen 1851.

Crelle's Journal 54 (1857)

Crelle's Journal 64 (1864)

Ueber die Anzahl der willkürlichen Constanten in algebraischen Functionen.

(Von Herrn *G. Roch* in Halle.)

Ist s eine durch die Gleichung $F(s, z) = 0$ definirte algebraische Function von z, so kann nach *Riemann* (s. dessen Abhandlung über *Abel*sche Functionen, Band 54. dieses Journals) jede wie s verzweigte algebraische Function s' von z rational durch s und z ausgedrückt werden. Wird die Function s' in m Punkten der Fläche T, welche die Verzweigungsart angiebt, unendlich erster Ordnung, so enthält dieselbe nach §. 5. der erwähnten Abhandlung $m-p+1$ willkürliche Constanten. Schon die a. a. O. untersuchte Bedingung der Existenz von Functionen, die in weniger als $p+1$ Punkten unendlich werden, zeigt, dass die Anzahl der wirklich vorhandenen Constanten eine grössere sein kann. Dies kann aber auch Statt finden, wenn m grösser als p ist. Ist z. B. s' der Quotient zweier Functionen φ, so wird s' in den $2p-2$ Punkten unendlich, in denen der Nenner gleich Null ist (s. §. 10. der citirten Abhandlung), und enthält so viele willkürliche Constanten, als die den Zähler bildende Function, nämlich p, während die Zahl $m-p+1$ im vorliegenden Falle gleich $p-1$ ist. Sind dagegen φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 solche Functionen φ, welche in $p-1$ Punkten unendlich klein zweiter Ordnung werden, deren Quadratwurzeln *Riemann* Abelsche Functionen nennt, so giebt es eine gewisse Anzahl von Ausdrücken $\sqrt{\frac{\varphi_1\psi_1}{\varphi_2\psi_2}}$, welche rationale Functionen von s und z sind; diese enthalten in der That $p-1$ Constanten in linearer Weise, ein Satz, der von *Riemann* herrührt und für welchen ein Beweis in der folgenden genauen Bestimmung der Constanten-Anzahl mit enthalten ist.

Der allgemeinste Ausdruck eines Integrals zweiter Gattung, welches in m Punkten ε unendlich erster Ordnung wird, ist

$$v = \beta_1 t_1 + \cdots + \beta_m t_m + \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_p w_p + \text{const.}$$

(Vergl. §. 5. der *Riemann*schen Abhandlung.) Hierbei sind unter $t_1 \ldots t_m$ specielle Integrale zweiter Gattung zu verstehen, welche beziehlich in den Punkten $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m$ unendlich werden wie $\frac{1}{\sigma_1} \cdots \frac{1}{\sigma_m}$, wenn σ_k eine Grösse be-

Quick proof when $D \geq 0$

Recall from Lecture 23 that

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X(D) \longrightarrow \underbrace{\prod_j \mathbb{C}_{p_j}^{\oplus n_j}}_{\text{sky scraper}} \longrightarrow 0$$

where $D = \sum n_j [p_j]$.

Then $\chi(X, \mathcal{O}_X(D)) = \chi(X, \mathcal{O}_X) + \chi(X, \prod_j \mathbb{C}_{p_j}^{\oplus n_j})$

$$= \chi(X, \mathcal{O}_X) + \sum n_j \chi(X, \mathbb{C}_{p_j})$$

$$= 1 - g + \sum n_j \cdot 1$$ previous examples

$$= 1 - g + \deg D$$

General Proof is very similar.

Claim $\forall p \in X$, we have an exact sequence

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(D) \longrightarrow \mathcal{O}_X(D+p) \longrightarrow \underbrace{\mathbb{C}_p}_{\text{skyscraper sheaf}} \longrightarrow 0$$

Assuming this, let

$$f(D) = \chi(\mathcal{O}_X(D)) - (1-g+\deg D)$$

$\boxed{i}$ $f(0) = \chi(\mathcal{O}_X) - (1-g) = 0$

$\boxed{ii}$ $f(D) = f(D+p)$ since the exact sequence gives

$$\chi(\mathcal{O}_X(D+p)) = \chi(\mathcal{O}_X(D)) + 1 \quad \text{and}$$

$$\deg(D+p) = \deg D + 1.$$

$\boxed{iii}$ $f(D) = f(D+E)$ for all divisors $E \geq 0$.

This follows from $\boxed{ii}$.

This shows f must be constant. Indeed, declare

$$D_1 \geq D_2 \quad \text{if} \quad D_1 - D_2 \geq 0.$$

If D_1, D_2 are two divisors, we can find D_3 with

$$D_3 \geq D_1 \quad \text{and} \quad D_3 \geq D_2.$$

By $\boxed{(a)}$, we have

$$\left.\begin{aligned} f(D_3) &= f(D_1) \\ f(D_3) &= f(D_2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(D_1) = f(D_2).$$

$\Rightarrow f$ constant $\overset{\boxed{(b)}}{\Longrightarrow} f \equiv 0 \Rightarrow$ Riemann – Roch.

Proof of the exact sequence (*)

Write $D = E + n[p]$, $p \notin \operatorname{Supp} E$. We show

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(E + n[p]) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_X(E + (n+1)[p]) \xrightarrow{\beta} \mathbb{C}_p \longrightarrow 0$$

The map α is the natural inclusion.

To define β, take f with

$$\operatorname{div} f + E + (n+1)[p] \geq 0.$$

In local coordinate near p, write

$$f(z) = \frac{a_{-n-1}}{(z-p)^{n+1}} + \cdots \qquad \text{Laurent expansion.}$$

Define $\beta(f) = a_{-n-1}$.

Why exact: If $\beta(f) = 0$ then $a_{-n-1} = 0 \Rightarrow f$ has pole of order $\leq n$ at p hence f is a section of $\mathcal{O}_X(E + n[p])$

Where to go from here?

(1) sheaf cohomology in more detail

(2) discussion of genus

- arithmetic genus $g = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$
- topological genus $2g = \dim H^1(X, \mathbb{C})$
- geometric genus via 1-forms $g = \dim H^0(X, \Omega^1_X)$

(3) Serre duality

$$H^0(X, \mathcal{F}) \cong H^1(X, \mathcal{F}^\vee \otimes \Omega^1_X)^\vee$$

(4) line bundles & the Jacobian

(5) projective embeddings, ample, very ample

line bundles $X \longrightarrow \mathbb{P}^N$

(6) moduli of curves $\mathcal{M}_g$, $\overline{\mathcal{M}}_g$

Many directions are possible!